

Stage per le gare a squadre - Algebra

Federico Lo Bianco

14 febbraio 2009

Prerequisiti

Operazioni coi polinomi, fattorizzazione e raccoglimenti, teorema di Ruffini, equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. In particolare ognuno dovrebbe saper rispondere senza esitazioni a queste domande:

- Qual é il risultato del prodotto $(x^2 + 2)(x - 1)$?
- Come si fattorizza $x^2 - 3x + 2$?
- Quali possono essere le radici razionali di $3x^{200} + 125x^{34} + 7x^8 - 999x - 1$?
- Per quali x reali vale $x^2 \geq 1$?

Problemi proposti

1. **Cesenatico 2000 es.18:** Sia P il prodotto delle soluzioni reali dell'equazione

$$\sqrt{399x}^{\log_{3997} x} = x^7.$$

Trovare le ultime 4 cifre della parte intera di P .

2. **Cesenatico 2003 es.8:** Uno storico della città si é accorto che il deficit del bilancio segue alcune regole curiose. Infatti se chiamiamo $f(n)$ il deficit dell'anno n dalla fondazione della città, allora $f(1) = 1$ e, per tutti i numeri naturali n , $f(2n) = 2f(n) + 1$. Quanto é stato il deficit nell'anno 1024-esimo dalla fondazione della città?
3. **Cesenatico 2004 es.7:** Per antica tradizione, tutti i re di Franquvia portano il nome di Herrovaccio e si distinguono tra loro mediante un numero. Il primo re portava il numero $a_1 = 1$, e poi, via via, ad ogni re successivo é stato assegnato un numero, ottenuto dal precedente, secondo la regola

$$a_{n+1} = 7a_n + 1.$$

Qual é stato il primo re della dinastia a portare un numero divisibile per 30?

4. **Cesenatico 2002 es.10:** Qual é il massimo intero che si può superare continuando a sommare gli $n/2^n$ -esimi di 2002 (ovvero i numeri nella forma $2002 \cdot \frac{1}{2^1}, 2002 \cdot \frac{2}{2^2}, 2002 \cdot \frac{3}{2^3}, \dots, 2002 \cdot \frac{n}{2^n}, \dots$)?

5. **Parma 2002 es.4:** Per laurearsi in matematica con voto finale 66, uno studente ha svolto, in ogni anno della sua carriera universitaria, soltanto 51 esercizi. Un suo amico, che ha avuto voto finale 67, ha svolto ogni anno gli esercizi precedenti, piú altri 53. Un terzo studente, che ha avuto voto finale 68, ha svolto, oltre a quelli necessari per il 67, altri 55 esercizi all'anno. Da questa verifica empirica, pare assodato che il numero di esercizi annui in piú, necessari per guadagnare un punto alla laurea, cresca di due in due, man mano che cresce il punteggio a cui si aspira.

Determinare, secondo questa regola, quanti esercizi dovrà fare ogni anno chi punta al 110.

6. **Cesenatico 2006 es.4:** Trovare il coefficiente di x^{2006} del polinomio

$$(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)^3(1+x^{16})(1+x^{32})^4(1+x^{64})(1+x^{128})(1+x^{256})(1+x^{512})(1+x^{1024})$$

7. **Parma 2003 es.22:** Ad una riunione familiare, la somma delle età di tutti i nipoti risulta uguale a 22.

Quanto può valere, al massimo, il prodotto delle età di tutti i nipoti?